JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **38**, 167–171 (1983)

Généralisation de l'inégalité de Markov

PIERRE GOETGHELUCK

Université de Paris-sud, Centre d'Orsay, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

Communicated by Oved Shisha

Received January 14, 1980

INTRODUCTION

Le problème que nous étudions ici a été posé en 1970 par P. Turan. Soit φ une fonction réelle définie sur $I=[-1, 1]$ et P un polynôme de degré au plus n vérifiant pour $x \in I$: $|P(x)| \leqslant |\varphi(x)|$. Quelle majoration peut on donner pour $P^{(k)}(x)$?

Pour $\varphi \equiv 1$ on a la célèbre inégalité de Markov

$$|P'(x)| \leqslant \inf(n^2, n(1-x^2)^{-1/2}) \qquad (x \in I)$$

et plus généralement (voir par exemple [7, p. 227])

$$|P^{(k)}(x)| \leqslant C_k n^k((1-x^2)^{1/2} + (1/n))^{-k} \qquad (x \in I)$$

où C_k est une constante qui ne dépend que de k.

Les cas $\varphi(x)=x$, $k=1$ et $\varphi(x)=(1-x^2)^{1/2}$, $k=1$ et 2 ont été étudiés avec beaucoup de précision par Rahmann et Pierre dans [4, 5]. Pour des améliorations diverses de l'inégalité de Markov nous renvoyons aux bibliographies de ces deux articles et à [6].

NOTATIONS

Pour toute fonction f réelle définie sur I on note $\|f\| = \mathrm{Sup}_{x \in I} |f(x)|$. Pour toute fonction g réelle définie sur $\mathbb{R}$ on note $\|g\|^* = \mathrm{Sup}_{x \in \mathbb{R}}\, g(x)$. On désigne par H_n l'espace des polynômes de degré au plus n. On pose pour $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$C(n, x) = n((1-x^2)^{1/2} + (1/n))^{-1}$$

0021-9045/83 $3.00

donc, d'après l'inégalité vue plus haut, pour tout $P \in H_n$ $(n \geqslant 1)$ on a $|P^{(k)}(x)| \leqslant C_k(C(n,x))^k \|P\|$. On remarquera que

$$C(n,x) \leqslant \inf(n^2, n(1-x^2)^{-1/2}) \leqslant 2C(n,x) \tag{1}$$

et que pour $q \in \mathbb{N}^*$

$$qC(n,x) \leqslant C(qn,x) \leqslant q^2 C(n,x). \tag{2}$$

Énoncé du résultat

Soient $a_1, a_2, \dots, a_\lambda$ des réels vérifiant

$$-1 \leqslant a_1 < \cdots < a_\lambda \leqslant 1$$

et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\lambda$ des réels positifs ou nuls. Soit m la fonction définie sur I par

$$m(x) = |x-a_1|^{\alpha_1} \cdots |x-a_\lambda|^{\alpha_\lambda}. \tag{3}$$

En prenant par convention $a_0 = -1$ et $a_{\lambda+1} = 1$, on note $J_i = [\frac{1}{2}(a_{i-1}+a_i), \frac{1}{2}(a_i+a_{i+1})]$ $(i = 1, 2, \dots, \lambda)$.

Soient $b_1, b_2, \dots, b_\mu$ des éléments (non nécessairement distincts) de I et u une fonction de $C^p(I)$ non nulle sur I. On pose

$$\varphi(x) = (x-b_1) \cdots (x-b_\mu)\, u(x). \tag{4}$$

On supposera que pour les indices i tels que a_i soit égal à l'un des b_j, $\alpha_i < 1$ (on voit bien dans l'énoncé du théorème qui suit que cette hypothèse n'est pas restrictive).

THÉORÈME. *Pour m et φ données par* (3) *et* (4) *et pour k entier positif tel que $k \leqslant p$, il existe deux constantes A et B telles que pour tout $P \in H_n$ $(n \geqslant 1)$ vérifiant $|P(x)|\, m(x) \leqslant |\varphi(x)|$ $(x \in I)$ on ait:*

$$* \quad |P^{(k)}(x)|\, m(x) \leqslant A \sum_{r=0}^{k} (C(n,x))^r\, |\varphi^{(k-r)}(x)| \qquad (x \in I). \tag{5}$$

$*$ *Pour $x \in J_i$,*

$$\begin{aligned} |P^{(k)}(x)| &\leqslant Bn^{k+\alpha_i} && si \quad |a_i| \neq 1 \\ &\leqslant Bn^{2k+2\alpha_i} && si \quad |a_i| = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

QUELQUES LEMMES

Posons par commodité d'écriture $v(x) = 1/u(x)$.

LEMME 1. *Il existe une constante C_1 telle que, pour tout entier $j \geqslant p$ on puisse trouver $Q_j \in H_j$ tel que*

$$|v^{(s)}(x) - Q_j^{(s)}(x)| \leqslant C_1(C(j, x))^{s-p} \, \|v^{(p)}\|$$
$$(x \in I, \quad s = 0, 1,..., p).$$

Ce résultat est dû à Malozemov [3].

LEMME 2. *Il existe une constante $C(m)$ telle que pour tout $S \in H_n$ $(n \geqslant 1)$, et pour tout entier $r \leqslant p$ on ait:*

$$|S^{(r)}(x)| \, m(x) \leqslant C(m)(C(n, x))^r \, \|Sm\| \qquad (x \in I).$$

Démonstration. Dans [2] on a montré que si T est un polynôme trigonométrique 2π-périodique et d'ordre au plus n, et si pour $a \geqslant 0$ w_a désigne la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $w_a(\theta) = |\theta|^a$, alors, $\|T'w_a\|^* \leqslant C(a) \, n \, \|Tw_a\|^*$ (où $C(a)$ est une constante qui ne dépend que de a). Par un procédé analogue, on obtient aisément le résultat suivant sigalé en remarque à la fin de [2]: $\|T'(\theta) \, m(\cos \theta)\|^* \leqslant C_2 n \, \|T(\theta) \, m(\cos \theta)\|^*$ où C_2 est une constante qui ne dépend que de m. Donc en posant $T(\theta) = S(\cos \theta)$ on a pour $x \in I$, $|S'(x)| \, (1 - x^2)^{1/2} \, m(x) \leqslant C_2 n \, \|Sm\|$. Mais la fonction $x \to (1 - x^2)^{1/2} \, m(x)$ est du même type que la fonction m, donc, par réitération, pour $x \in I$ on aura

$$|S^{(r)}(x)| \, m(x)(1 - x^2)^{r/2} \leqslant C_3 n^r \, \|Sm\| \qquad (C_3 \text{ dépend de } m).$$

D'autrepart, d'après [1, th. 3], pour $x \in I$:

$$|S^{(r)}(x) \, m(x)| \leqslant C_4 n^{2r} \, \|Sm\| \qquad (C_4 \text{ dépend de } m).$$

Ces deux dernières inégalités combinées avec (1) nous donnent le résultat cherché.

On pose $j(n) = \mathrm{Max}(n, p)$.

LEMME 3. *Il existe une constante C_5 (dépendant de m) telle que pour tout $R \in H_n$ et pour tout $r \leqslant p$ on ait (Q_j désignant les polynômes du lemme 1) pour $x \in I$:*

$$|[R(v - Q_{j(n)})]^{(r)} \, (x)| \, m(x) \leqslant C_5(C(n, x))^{r-p} \, \|Rm\| \, \|v^{(p)}\|.$$

Démonstration. On a

$$[R(v-Q_{j(n)})]^{(r)}\,m=\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}R^{(r-s)}m(v^{(s)}-Q_{j(n)}^{(s)})$$

donc d'après les lemmes 1 et 2:

$$\begin{aligned}&|[R(v-Q_{j(n)})]^{(r)}\,(x)|\,m(x)\\&\quad\leqslant C_6\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}(C(n,x))^{r-s}\,(C(j(n),x))^{s-p}\,\|Rm\|\,\|v^{(p)}\|.\end{aligned}$$

Mais on a toujours $C(n,x)\leqslant C(j(n),x)$ donc

$$(C(n,x))^{r-s}\,(C(j(n),x))^{s-p}\leqslant (C(n,x))^{r-p}$$

ce qui établit le lemme 3.

LEMME 4. *Pour $\alpha>0$ donné, il existe une constante $C(\alpha)$ telle que pour tout $S\in H_n$ $(n\geqslant 1)$ on ait*

$$\|S(x)\,|x|^{\alpha}\|\leqslant C(\alpha)\,n^{\alpha}\,\|S\|,$$
$$\|S(x)\,|1\pm x|^{\alpha}\|\leqslant C(\alpha)\,n^{2\alpha}\,\|S\|.$$

Ce résultat est établi dans [1, th. 2]. On l'utilisera après changement de variable, sur un intervalle fermé borné quelconque.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Soit $P\in H_n$ vérifiant pour $x\in I$ $|P(x)|\,m(x)\leqslant|\varphi(x)|$. On peut alors écrire $P(x)=(x-b_1)\cdots(x-b_\mu)\,R(x)$ où $R\in H_n$ et vérifie, pour $x\in I$ $|R(x)|\,m(x)\leqslant|u(x)|$. En utilisant le lemme 1 avec $s=0$ on a:

$$\begin{aligned}\|RQ_{j(n)}m\|&\leqslant\|Rvm\|+\|R(Q_{j(n)}-v)\,m\|\leqslant 1+C_1\,\|Rm\|\,\|v^{(p)}\|\\&\leqslant 1+C_1\,\|u\|\,\|v^{(p)}\|=C_7.\end{aligned}$$

Il résulte alors du lemme 2 et de (2) que:

$$\begin{aligned}&|[R(x)\,Q_{j(n)}(x)]^{(r)}|\,m(x)\\&\quad\leqslant C_8(C(n,x))^{r}\qquad (C_8\text{ dépend de }m\text{ et de }\varphi).\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}&|[Rv]^{(r)}\,(x)\,m(x)|\\&\quad\leqslant|[R(v-Q_{j(n)})]^{(r)}\,(x)\,m(x)|+|[RQ_{j(n)}]^{(r)}\,(x)\,m(x)|\end{aligned}$$

donc, en utilisant le lemme 3:

$$
\begin{aligned}
&|(Rv)^{(r)}(x)\, m(x)| \\
&\quad \leqslant C_9(C(n,x))^{r-p}\, \|Rm\|\, \|v^{(p)}\| + C_8(C(n,x))^r \\
&\quad \leqslant C_{10}(C(n,x))^r \qquad (C_9 \text{ et } C_{10} \text{ dépendent de } m \text{ et } \varphi).
\end{aligned}
$$

Ceci peut encore s'écrire, pour $x \neq b_i$ $(i = 1,\dots,\mu)$

$$|(P/\varphi)^{(r)}(x)\, m(x)| = |(R/u)^{(r)}(x)\, m(x)| \leqslant C_{10}(C(n,x))^r.$$

L'égalité $P^{(k)}m = (\varphi(P/\varphi))^{(k)}\, m = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r}(P/\varphi)^{(r)}\, \varphi^{(k-r)}m$ nous donne alors immédiatement l'inégalité (5) pour $x \neq b_i$ $(i = 1,\dots,\mu)$ et par continuité pour tout x dans I.

Montrons maintenant les inégalités (6).

Si $|a_i| \neq 1$, pour $x \in J_i$ on a d'après (5)

$$|P^{(k)}(x)\, m(x)| \leqslant C_{11} n^k$$

donc, avec le lemme 4 $|P^{(k)}(x)| \leqslant C_{12} n^{k+a_i}$.

Si $|a_i| = 1$, raisonnement analogue en remplaçant n par n^2.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. GOETGHELUCK, Polynomial inequalities and Markov's inequality in weighted L^p-spaces, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **33** (1979), 325–331.
2. P. GOETGHELUCK, Inégalité de Bernstein dans les espaces L^p avec poids, *J. Approx. Theory* **28** (1980), 359–365.
3. V. N. MALOZEMOV, Joint approximation of a function and its derivaties by algebraic polynomials, *Soviet Math. Dokl.* **7**, No. 5 (1966), 1274–1276.
4. R. PIERRE AND Q. I. RAHMANN, On a problem of Turan about polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **56** (1976), 231–238.
5. Q. I. RAHMANN, On a problem of Turan about polynomials with curved majorants, *Trans. Amer. Math. Soc.* **163** (1972), 447–445.
6. Q. I. RAHMANN, Inequalities of Markov and Bernstein, in "Polynomial and Spline Approximation," (Badri N. Sahney, Ed.), Reidel, Dordrecht, Netherlands, 1979.
7. A. F. TIMAN, "Theory of Approximation of Functions of a Real Variable," Pergamon, Elmsford, N.Y., 1963.